Inspectoratul Şcolar Judeţean Brăila
Şcoala Gimnazială „Vasile Alecsandri” Brăila
Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Brăila

Concursul Interjudeţean de Matematică “Math For You”
Ediţia a II-a, 18 mai 2019

CLASA A VI-A, SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

1. Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 99. Se șterg două numere și se scrie pe tablă suma celor două numere șterse. Este posibil ca, repetând acest procedeu, pe tablă să fie scrise la un moment dat 58 de numere divizibile cu 5? Justificați răspunsul.

Daniela Stănică, Brăila

Soluţie.

Grupăm cele 99 de numere în 5 grupe, cele de forma $5k,\ 5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$ ***2p***

Prima grupă conține 19 numere, a doua grupă conține 20 de numere, a treia grupă conține 20 de numere, a patra grupă conține 20 de numere, a cincea grupă conține 20 de numere...***2p***

A doua grupă adunată termen cu termen cu a cincea grupă ne asigură 20 de numere divizibile cu 5...***1p***

A treia grupă adunată termen cu termen cu a patra grupă ne asigură 20 de numere divizibile cu 5...***1p***

Avem acum 19+20+20=59 de numere divizibile cu 5, adică 57 + 2 numere divizibile cu 5. Suma celor două numere ne dă un nou număr divizibil cu 5 și împreună cu cele 57, vom avea pe tablă 58 de numere divizibile cu 5..............***1p***

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ știind că $\left(\overline{abc}+1\right)\vdots 5$, $\left(\overline{abc}+2\right)\vdots 6$ și $\left(\overline{abc}+3\right)\vdots 7$.

Daniela Stănică, Brăila

Soluţie.

$\overline{abc}=5k-1, \overline{abc}=6p-2, \overline{abc}=7t-3, k, p, t\in\mathbb{N}$ ***1p***

$5k-1=6p-2\Rightarrow k=p+\dfrac{p-1}{5}\Rightarrow p=5s+1, s\in\mathbb{N}\Rightarrow \overline{abc}=30s+4$ ***2p***

$30s+4=7t-3\Rightarrow t=1+\dfrac{30s}{7}\Rightarrow s=7v, v\in\mathbb{N}$ ***2p***

$\overline{abc} = 210v + 4, v \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{abc} = \{214, 424, 634, 844\}$ ………….………………….***2p***

3. Se consideră unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DCB$, cu măsuri diferite, astfel încât punctele *A* și *D* sunt de o parte și de alta a dreptei *BC*. Fie (*BX*, (*CY* bisectoarele celor două unghiuri. Notăm $AB \cap CD = \{P\}$ și $BX \cap CY = \{M\}$.

a) Dacă m($\sphericalangle ABC$)=120° și m($\sphericalangle DCB$)=40°, arătați că *MP* și *BC* nu sunt paralele.
b) Există măsuri ale celor două unghiuri, $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DCB$, pentru care $BC \parallel MP$?

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie.

3p a) (fig.1) Pp. R.A. că $MP \| BC$.

1. $\sphericalangle PMC \equiv \sphericalangle MCP (20^\circ) \Rightarrow$ triunghiul *PMC* isoscel ⇒PC=PM.
2. $m(\sphericalangle MBP) = m(\sphericalangle ABX) = 60^\circ$ si cum $60^o = m(\sphericalangle CBP) = m(\sphericalangle MPB)$(alt.int.) ⇒ triunghiul MBP echilateral ⇒ PB=PM.
3. Din 1 si 2 avem ca triunghiul PBC isoscel, cu PB=PC ceea ce contrazice $m(\sphericalangle PBC) = 60^\circ$ si $m(\sphericalangle BCP) = 40^\circ$.

4p b) (fig. 2) Notam $m(\sphericalangle ABC) = 2x$ si $m(\sphericalangle BCP) = 2y$.

Daca MP$\| BC$, atunci triunghiurile BPM si PBC fiind isoscele, avem ca $m(\sphericalangle PBC) = 2y$ si cum $\sphericalangle$ ABP este alungit, avem ca $\sphericalangle ABC$ si $\sphericalangle DCB$ sunt suplementare. Voi demonstra ca aceasta conditie este suficienta pentru ca dreptele MP si BC sa fie paralele.

Construim prin P o paralela la BC care taie BX in T si CY in S.

1. $\sphericalangle PCS \equiv \sphericalangle BCS \equiv \sphericalangle CSP \Rightarrow$ triunghiul SPC isoscel ⇒ CP=PS.
2. $\sphericalangle TBP \equiv \sphericalangle ABX \equiv \sphericalangle XBC \equiv \sphericalangle BTP \Rightarrow$ triunghiul PBT isoscel ⇒ PB=PT.
3. Deoarece $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DCB$ sunt suplementare ⇒ $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle PCB \Rightarrow$ CP=PB.

Din 1, 2 și 3 obținem *PS=PT*, adică *T=S=M* și MP$\| BC$.

Fig. 1

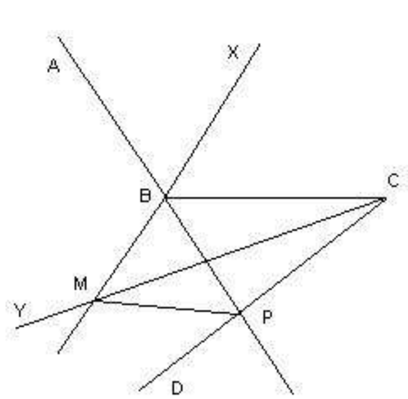

Fig. 2