Inspectoratul Şcolar Judeţean Brăila
Şcoala Gimnazială „Vasile Alecsandri” Brăila
Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Brăila

Concursul Interjudeţean de Matematică “Math For You”
Ediţia a II-a, 18 mai 2019

CLASA A IX-A, SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

1. Dacă $a,b,c\in(0,+\infty)$ şi $\sqrt{a^2+2010}+\sqrt{b^2+2010}=2\sqrt{c^2+2010}$, atunci ecuaţia $x^2-2x\sqrt{a^2+b^2}+2c^2=0$ are rădăcini reale.

Florin Antohe, Galați

Soluţie.

Ecuaţia din enunţ are rădăcini reale dacă şi numai dacă $a^2+b^2\ge 2c^2$ ………...***1p***

$\sqrt{a^2+2010}+\sqrt{b^2+2010}=2\sqrt{c^2+2010}\Leftrightarrow$

$a^2+b^2-2c^2=2\left(2010+c^2-\sqrt{\left(a^2+2010\right)\left(b^2+2010\right)}\right)$………………………...***3p***

$2010+c^2=\dfrac{\left(\sqrt{a^2+2010}+\sqrt{b^2+2010}\right)^2}{4}\ge\sqrt{\left(a^2+2010\right)\left(b^2+2010\right)}$ ………..…..***3p***

2. Fie triunghiul *ABC* și *A*’, *B*’, *C*’ punctele diametral opuse lui *A*, *B*, respectiv *C* pe cercul circumscris triunghiului *ABC*. Dacă G_a,G_b, respectiv G_c sunt centrele de greutate ale triunghiurilor *A*’*BC*, *AB*’*C*, respectiv *ABC*’, atunci demonstrați că triunghiurile $G_aG_bG_c$ și *ABC* sunt asemenea.

Marius Perianu, Slatina

Soluţie.

Fie *O*, *G*, *H* centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul triunghiului *ABC*.

Folosind relația lui Leibniz, rezultă:

$$\overrightarrow{AG_a}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\frac{5}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OA}$$

Analog obținem $\overrightarrow{BG_b}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{CG_c}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OC}$ ***4p***

Avem $\overrightarrow{G_aG_b}=\overrightarrow{G_aA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG_b}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow G_aG_b \parallel AB$ ***3p***

3. ***a)*** Arătați că $[x]+[-x]=-1,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{3x+5}{7}+\left[\frac{1-2x}{6}\right].$

Marius Perianu, Slatina

Soluţie.

a) $[x]=k\Rightarrow k\le x<k+1\Rightarrow -k-1<-x\le -k\Rightarrow[-x]=-k-1$ ***2p***

b) $\frac{2x-1}{6}=t\Rightarrow\left[t+\frac{1}{2}\right]=\frac{18t+13}{14}+[-t]$..***1p***

Dacă $t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=\frac{13}{10}\notin\mathbb{Z}$ ***1p***

Dacă $t\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[t]+[-t]=-1\Rightarrow\left[t+\frac{1}{2}\right]+[t]=\frac{18t-1}{14}\Rightarrow[2t]=\frac{18t-1}{14}$ ***2p***

Obținem $x\in\left\{\frac{2}{3},3\right\}$...***1p***